Probabilidade e Processos Estocásticos

Mestrado Métodos Matemáticos em Energia/Finanças

Prova Final - Solução

(1) O evento B pode ser escrito como

$$B = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Dado qualquer $n \geq 1$,

$$\mathcal{P}\big(\sum_{k=n}^{\infty} A_k \big) \leq \sum_{k=n} \mathcal{P}(A_k)$$

e a hipótese significa que esta expressão converge para zero quando $n \to \infty$. Como a sequência de conjuntos

$$\cup_{k=n}^{\infty} A_k$$

é não-crescente, concluímos (propriedade de monotonia da probabilidade) que

$$\mathcal{P}\big(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k \big) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{P}\big(\cup_{k=n}^{\infty} A_k \big) = 0.$$

(2) Note que $Y = X_1 - X_2$ se $X_1 \geq X_2$ e $Y = X_2 - X - 1$ se $X_2 \geq X_1$. Em qualquer dos casos $Y \in [0, 1]$. Portanto $\mathcal{F}_Y(a) = 0$ para todo $a < 0$ e $F_Y(a) = 1$ para todo $a > 1$. Para $0 \leq a \leq 1$,

$$\mathcal{F}_Y(A) = \mathcal{P}(Y \leq a) = \mathcal{P}(X_1 \geq X_2, X_1 - X_2 \leq a) + \mathcal{P}(X_1 < X_2, X_2 - X_1 \leq a).$$

As duas parcelas correspondem às regiões sombreadas na figura. Como X_1 e

PSfrag replacements

a

X_1

X_2

X_2 têm distribuição uniforme e são independentes, (X_1, X_2) tem distribuição uniforme em $[0,1] \times [0,1]$. Portanto,

$$\mathcal{F}_Y(a) = 1 - (1-a)^2 = 2a - a^2 \quad \text{para } 0 \le a \le 1.$$

Considere

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2a & \text{se } 0 \le a \le 1 \\ 0 & \text{se } a \notin [0,1] \end{cases} .$$

Então $\mathcal{F}_Y(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ para todo a. Isto prova que a variável Y é absolutamente contínua, tendo f como função de densidade.

(3)(a) Queremos calcular $\mathcal{F}_{X_1,X_2}(a_1, a_2) = \mathcal{P}(X_1 \le a_1, X_2 \le a_2)$ para todo $a_1 \ge 0$ e $a_2 \ge 0$. Se $a_1 + a_2 > 1$ então $\mathcal{F}_{X_1,X_2}(a_1,a_2) = 1$. No caso $a_1 + a_2 \le 1$

PSfrag replacements

R
1
-1
a_1
a_2

$$\mathcal{F}_{X_1,X_2}(a_1, a_2) = \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_2}{2}\frac{2-a_2}{2} + \frac{a_2}{2}\frac{2-a_2}{2} + \frac{1}{4}$$

(a função de densidade é constante $= 1/2$).

(3)(b) pelo item anterior,

$$\mathcal{P}(X_1 \le \frac{1}{2}, X_2 \le \frac{1}{2}) = \mathcal{F}_{X_1,X_2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}.$$

Por outro lado,

$$\mathcal{P}(X_1 \le \frac{1}{2}) = \mathcal{P}(X_2 \le \frac{1}{2}) = \frac{7}{8}.$$

Portanto, as variáveis não são independentes:

$$\mathcal{P}(X_1 \le \frac{1}{2}, X_2 \le \frac{1}{2}) \ne \mathcal{P}(X_1 \le \frac{1}{2})\mathcal{P}(X_2 \le \frac{1}{2}).$$

(4)(a) Seja N o número de lançamentos. Sempre temos $N \ge 2$.
Se $X_1 = 6$ então $N = 2$ com probabilidade total. Dado $k = 2, 3, \ldots$
Se $X_1 = 5$ então $N > k$ com probabilidade $(1/6)^{k-1}$.
Se $X_1 = 4$ então $N > k$ com probabilidade $(2/6)^{k-1}$.
Se $X_1 = 3$ então $N > k$ com probabilidade $(3/6)^{k-1}$.

Se $X_1 = 2$ então $N > k$ com probabilidade $(4/6)^{k-1}$.
Se $X_1 = 1$ então $N > k$ com probabilidade $(5/6)^{k-1}$.
Portanto

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(N > k) = 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{P}(N > k) = 2 + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{6}\left(\frac{6-i}{6}\right)^{k-1}$$
$$= 2 + \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6-i}{6}\right)^{k} = 2 + \sum_{i=1}^{5} \frac{6-i}{6i}$$

(4)(b)
Os resultados (X_1, X_2) possíveis são
$(1,1)$, com probabilidade $(1/6)$
$(2,1)$, $(2,2)$, com probabilidade $(1/6)(1/2)$ cada um
$(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$, com probabilidade $(1/6)(1/3)$ cada um
$(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, com probabilidade $(1/6)(1/4)$ cada um
$(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$, $(5,5)$ com probabilidade $(1/6)(1/5)$ cada um
$(6,1)$, $(6,2)$, $(6,3)$, $(6,4)$, $(6,5)$, $(6,6)$ com probabilidade $(1/6)(1/6)$ cada um
Portanto $\mathrm{cov}(X_1X_2 = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$ vem dada por

$$E(X_1) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = \frac{16}{6}$$

$$E(X_2) = \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}) + \frac{2}{6}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6})$$
$$+ \frac{3}{6}(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}) + \frac{4}{6}(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}) + \frac{5}{6}(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}) + \frac{6}{6}\frac{1}{6}$$

e

$$E(X_1X_2) = 1\frac{1}{6} + (2+4)\frac{1}{6}\frac{1}{2} + (3+6+9)\frac{1}{6}\frac{1}{3} + (4+8+12+16)\frac{1}{6}\frac{1}{4}$$
$$+ (5+10+15+20+25)\frac{1}{6}\frac{1}{5} + (6+12+18+24+30+36)\frac{1}{6}\frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{6}(1+3+6+10+15+21) = \frac{46}{6}$$

(5)(a) A função de densidade conjunta de X_{2n-1} e X_{2n} é constante igual a 1 no quadrado $[0,1] \times [0,1]$, uma vez que etsas variáveis são independentes e uniformente distribuídas em $[0,1]$. Portanto $\mathrm{Var}(Z_n) = E(Z_n^2) - E(Z_n)^2 = 1$, já que

$$E(Z_n) = \int_0^1 \int_0^1 (x_1 - x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-1}^{1} \int_{|t|}^{|t|} t dt ds = \int_{-1}^{1} 2t|t| dt = 0$$

$$E(Z_n^2) = \int_0^1 \int_0^1 (x_1 - x_2)^2 dx_1 dx_2 = \int_{-1}^1 2t^2|t|dt = 2\int_0^1 2t^3 dt = 1.$$

(5)(b) Como os X_n são independentes e identicamente distribuídos, e cada Z_n depende apenas de X_{2n-1} X_{2n}, as variáveis Z_n também são independentes e identicamente distribuídas. No item anterior vimos que elas têm esperança e variância finitas. Logo podemos aplicar o teorema central do limite para concluir que existem constantes m e σ (neste caso m = esperança = 0 e σ^2 = variância = 1) tais que a sequência das funções de distribuição $\mathcal{F}_{W_n}$ das variaáveis

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(Z_1 + \cdots + Z_n)$$

converge em todo ponto para a função de distribuição normal

$$\mathcal{F}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^a e^{-(x-m)^2/2}.$$