Probabilidade e Processos Estocásticos

Mestrado Métodos Matemáticos em Energia/Finanças

Prova 2 - Solução

(1) A cada retirada a probabilidade de *não* obter a carta inicial é 51/52. Além disso as tentativas sucessivas são independentes (porque há reposição e embaralhamento). Portanto $\mathcal{P}(N > k) = (51/52)^{k-1}$ para todo $k \geq 1$. Note que $\mathcal{P}(N > 0) = 1$. Equivalentemente, $\mathcal{P}(N = k) = (1/52)(51/52)^{k-2}$ para todo $k \geq 2$ e $\mathcal{P}(N = 0) = \mathcal{P}(N = 1) = 0$. Logo,

$$E(N) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathcal{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(N > k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(51/52)^{k-1} = 53$$

$$E(N^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\mathcal{P}(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty}(k^2/52)(51/52)^{k-1}$$

$$\mathrm{Var}\,(N) = E(N^2) - E(N)^2$$

(2)(a) Como X_{2n-1} e X_{2n} são independentes, a sua função de densidade conjunta é

$$f_{X_{2n-1},X_{2n}}(x_1, x_2) = f_{X_{2n-1}}(x_1)f_{X_{2n}}(x_2) = \frac{1}{2n-1}\frac{1}{2n}\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(Z = 1) = \mathcal{P}(X_{2n} > 1 + X_{2n-1}) &= \int_0^{2n-1} dx_1 \int_{1+x_1}^{2n} dx_2 \frac{1}{2n(2n-1)} \\ &= \frac{1}{2n(2n-1)}\frac{1}{2}(2n-1)(2n-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\,.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$E(Z_n) = 0\mathcal{P}(Z_n = 0) + 1\mathcal{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$$

$$E(Z_n^2) = 0^2\mathcal{P}(Z_n = 0) + 1^2\mathcal{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$$

$$\mathrm{Var}\,(Z_n) = E(Z_n^2) - E(Z_n)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16n^2}\,.$$

(2)(b) Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}\,(Z_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{16n^4}$$

converge. Portanto podemos aplicar a primeira lei forte dos grandes números de Kolmogorov para concluir que

$$\frac{1}{n}\left(Z_1 + \cdots + Z_n - E(Z_1) - \cdots - E(Z_n)\right) \to 0$$

quase certamente. Observe que, $E(Z_n) \to 1/2$ e portanto

$$\frac{1}{n}\left(E(Z_1) + \cdots + E(Z_n)\right) \to \frac{1}{2}\,.$$

Logo, a relação anterior quer dizer que

$$\frac{1}{n}\left(Z_1 + \cdots + Z_n\right) \to \frac{1}{2}$$

quase certamente.

(3) Se $X+Y$ e $X-Y$ são independentes,

$$E((X+Y)(X-Y)) = E(X+Y)E(X-Y).$$

Usando a linearidade da esperança matemática, isto é equivalente a

$$\begin{aligned} E(X^2 - Y^2) = (E(X)+E(Y))(E(X)-E(Y)) &\Leftrightarrow E(X^2) - E(Y^2) = E(X)^2 - E(Y)^2 \\ &\Leftrightarrow E(X^2) - E(X)^2 = E(Y^2) - E(Y)^2. \end{aligned}$$

A última igualdade significa que $\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(Y)$.

(4) Note que $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ são independentes, identicamente distribuídas (porque $\mathcal{P}(X_n = 0)$ e $\mathcal{P}(X_n = 1)$ não dependem de n) e integráveis (porque $E(X_n) = 1/2$ é finita). Portanto, pelo teorema central do limite,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_n - n\mu) \to N(0,1) \quad \text{em distribuição}$$

onde $\mu = E(X_n) = 1/2$ e $\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = 1/2 - 1/4 = 1/4$, e portanto $\sigma = 1/2$. Isto significa que

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_n - n\mu) \le a\right) \to \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

(5)(a) Por independência

$$\mathcal{F}_Y(a) = \mathcal{P}(Y \le a) = \mathcal{P}(X_1 \le a \text{ e } X_2 \le a) = \mathcal{P}(X_1 \le a)\mathcal{P}(X_2 \le a) = a^2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Z(a) &= \mathcal{P}(Z \leq a) = \mathcal{P}(X_1 \leq a \text{ ou } X_2 \leq a) \\ &= \mathcal{P}(X_1 \leq a) + \mathcal{P}(X_2 \leq a) - \mathcal{P}(X_1 \leq a \text{ e } X_2 \leq a) = 2a - a^2.\end{aligned}$$

(5)(b) Por definição $\operatorname{Cov}(Y,Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z)$. Como X_1 e X_2 são independentes, a sua função de densidade conjunta é

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) = 1\,.$$

Portanto

$$\begin{aligned}E(Y) &= \int_0^1 \int_0^1 \max\{x_1,x_2\} dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} x_1\, dx_2 + \int_0^1 dx_2 \int_0^{x_1} x_2\, dx_1 \\ &= \int_0^1 x_1^2 dx_1 + \int_0^1 x_2^2 dx_2 = 2/3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(Z) &= \int_0^1 \int_0^1 \min\{x_1,x_2\} dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2\, dx_2 + \int_0^1 dx_2 \int_0^{x_1} x_2\, dx_1 \\ &= \int_0^1 (x_1^2/2) dx_1 + \int_0^1 (x_2^2/2) dx_2 = 1/3.\end{aligned}$$

Método alternativo: Do item (a) temos que as funções de densidade de Y e Z são dadas por $f_Y(x) = 2x$ e $f_Z(x) = 2 - 2x$ para $x \in [0,1]$, e $f_Y(x) = f_Z(x) = 0$ se $x \notin [0,1]$. Portanto

$$E(Y) = \int_0^1 x f_Y(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = 2/3$$

$$E(Z) = \int_0^1 x f_Z(x) dx = \int_0^1 2x - 2x^2 dx = 1/3.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}E(YZ) &= \int_0^1 \int_0^1 \max\{x_1,x_2\} \min\{x_1,x_2\} dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 x_1 x_2\, dx_1\, dx_2 \\ &= \int_0^1 x_1\, dx_1 \int_0^1 x_2\, dx_2 = 1/4.\end{aligned}$$

Portanto $\operatorname{Cov}(Y,Z) = (1/4) - (1/3)(2/3) = 1/36$.