Probabilidade e Processos Estocásticos

Mestrado Métodos Matemáticos em Energia/Finanças

Prova 1 - Solução

(1)(a) Temos que $A_n \setminus (A_n \cap B_n) \subset B_n^c$ e portanto

$$0 \leq \mathcal{P}\big(A_n \setminus (A_n \cap B_n)\big) \leq \mathcal{P}(B_n^c).$$

Por hipótese, $\mathcal{P}(B_n^c) = 1 - \mathcal{P}(B_n)$ converge para zero. Logo (sanduiche)

$$\mathcal{P}(A_n) - \mathcal{P}(A_n \cap B_n) = \mathcal{P}\big(A_n \setminus (A_n \cap B_n)\big)$$

converge para zero. Junto com $\mathcal{P}(A_n) \to a$, isto implica a tese.

(1)(b) Dado qualquer $n \geq 1$,

$$\mathcal{P}\big(\sum_{k=n}^{\infty} A_k\big) \leq \sum_{k=n} \mathcal{P}(A_k)$$

e a hipótese significa que esta expressão converge para zero quando $n \to \infty$. Como a sequência de conjuntos

$$\sum_{k=n}^{\infty} A_k$$

é não-crescente, concluímos (propriedade de monotonia da probabilidade) que

$$\mathcal{P}\big(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k\big) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{P}\big(\cup_{k=n}^{\infty} A_k\big) = 0.$$

(2) Seja $A = \{$ o alarme disparou $\}$ e $I = \{$ ocorreu um incêndio $\}$. Temos

$$\mathcal{P}(A \mid I) = 0,90 \quad \mathcal{P}(A \mid I^c) = 0,15 \quad \mathcal{P}(I) = 0,05.$$

Pela fórmula de Bayes

$$\mathcal{P}(I \mid A) = \frac{\mathcal{P}(I \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(A \mid I)\mathcal{P}(I)}{\mathcal{P}(A \mid I)\mathcal{P}(I) + \mathcal{P}(A \mid I^c)\mathcal{P}(I^c)}.$$

Portanto

$$\mathcal{P}(I \mid A) = \frac{0,90 \times 0,05}{0,90 \times 0,05 + 0,15 \times 0,95} = \frac{6}{25}.$$

(3) Seja X = tempo até a emissão da amostra A e Y = tempo até a emissão da amostra B. Seja T o tempo até a primeira emissão e seja $\mathcal{F}$ a sua função de distribuição. Então

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(a) &= \mathcal{P}\big([T \leq a]\big) = \mathcal{P}([X \leq a] \text{ ou } [Y \leq a]\big) \\ &= \mathcal{P}([X \leq a]) + \mathcal{P}([Y \leq a]) - \mathcal{P}([X \leq a] \cap [Y \leq a]).\end{aligned}$$

A hipótese diz que $\mathcal{P}([X > a]) \leq e^{-\alpha a}$ e $\mathcal{P}([Y > a]) \leq e^{-\beta a}$ para todo $a > 0$ e que as variáveis X e Y são independentes. Portanto

$$\mathcal{P}([X \leq a] \cap [Y \leq a]) = \mathcal{P}([X \leq a])\, \mathcal{P}([Y \leq a])$$

e $\mathcal{F}(a) = (1 - e^{-\alpha a}) + (1 - e^{-\beta a}) - (1 - e^{-\alpha a})(1 - e^{-\beta a}) = 1 - e^{-(\alpha+\beta)a}$.

(4)(a)

Os resultados (X_1, X_2) possíveis são

$(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$ com probabilidade $(1/6)(1/6)$ cada um

$(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$ com probabilidade $(1/6)(1/5)$ cada um

$(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$ com probabilidade $(1/6)(1/4)$ cada um

$(4,4)$, $(4,5)$, $(4,6)$ com probabilidade $(1/6)(1/3)$ cada um

$(5,5)$, $(5,6)$ com probabilidade $(1/6)(1/2)$ cada um

$(6,6)$ com probabilidade $(1/6)$

Portanto

$\mathcal{P}(X_2 = 1) = (1/6)(1/6)$,

$\mathcal{P}(X_2 = 2) = (1/6)(1/6) + (1/6)(1/5)$,

$\mathcal{P}(X_2 = 3) = (1/6)(1/6) + (1/6)(1/5) + (1/6)(1/4)$,

$\mathcal{P}(X_2 = 4) = (1/6)(1/6) + (1/6)(1/5) + (1/6)(1/4) + (1/6)(1/3)$,

$\mathcal{P}(X_2 = 5) = (1/6)(1/6) + (1/6)(1/5) + (1/6)(1/4) + (1/6)(1/3) + (1/6)(1/2)$

$\mathcal{P}(X_2 = 6) = (1/6)(1/6) + (1/6)(1/5) + (1/6)(1/4) + (1/6)(1/3) + (1/6)(1/2) + (1/6)$

e a função de distribuição é dada por $\mathcal{F}(a) = \sum_{i \leq a} \mathcal{P}(X_2 = i)$.

(4)(b) Seja N o número de lançamentos.

Se $X_1 = 1$ então $N = 2$ com probabilidade total.

Se $X_1 = 2$ então $N = 2$ com probabilidade $(5/6)$, $N = 3$ com probabilidade $(1/6)(5/6)$, $N = 4$ com probabilidade $(1/6)^2(5/6)$, etc

Se $X_1 = 3$ então $N = 2$ com probabilidade $(4/6)$, $N = 3$ com probabilidade $(2/6)(4/6)$, $N = 4$ com probabilidade $(2/6)^2(4/6)$, etc

Portanto

$$
\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\mathcal{P}([N=n]) \\
&= 2\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{6}\right] \\
&+ 3\left[\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\frac{2}{6}\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\frac{3}{6}\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\frac{4}{6}\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}\right] \\
&+ 4\left[\frac{1}{6}(\frac{1}{6})^2\frac{5}{6} + \frac{1}{6}(\frac{2}{6})^2\frac{4}{6} + \frac{1}{6}(\frac{3}{6})^2\frac{3}{6} + \frac{1}{6}(\frac{4}{6})^2\frac{2}{6} + \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^2\frac{1}{6}\right] \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$

(5)(a)

Se $a < 0$ então $\mathcal{F}_{X+Y}(a) = 0$.

Para $0 \leq a \leq 1$,

$$\mathcal{F}_{X+Y}(a) = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy = a^2/2.$$

Para $1 \leq a \leq 2$,

$$\mathcal{F}_{X+Y}(a) = \int_0^{a-1} dx \int_0^1 dy + \int_{a-1}^1 dx \int_0^{a-x} dy = 1 - \frac{(2-a)^2}{2}.$$

Se $a > 2$ então $\mathcal{F}_{X+Y}(a) = 1$.

O cálculo para $\mathcal{F}_{X-Y}$ é similar.

(5)(b) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x & \Leftarrow 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \Leftarrow 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \Leftarrow x \notin [0,2] \end{cases}$$

Afirmamos que f é função de densidade de $X+Y$, ou seja $\mathcal{F}(a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$ para todo a.

Para $a < 0$: é imediato que $\int_{-\infty}^a f(x)dx = 0 = \mathcal{F}(a)$.

Para $0 \leq a \leq 1$:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_0^a xdx = \frac{a^2}{2} = \mathcal{F}(a).$$

Para $1 \leq a \leq 2$:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^a (2-x)dx = \frac{1}{2} + (2z - \frac{z^2}{2})\,|_1^a = \mathcal{F}(a).$$

Para $a \geq 2$: tem-se $\int_{-\infty}^a f(x)dx = 1 = \mathcal{F}(a)$.

O caso de $X-Y$ é similar.