Ainda os ponteiros do relógio

*Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira**
Aluno do Colégio Santo Inácio, Rio de Janeiro

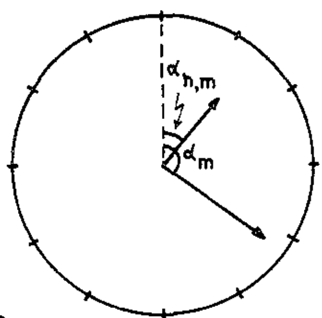
Na **RPM** 3, p. 28 mostrou-se um teste de QI extremamente mal feito, que consistia no seguinte:

"Um relógio marca 8 horas e 20 minutos. Que hora marcará se trocarmos a posição do ponteiro grande com a do pequeno?"

A resposta é, logicamente, hora nenhuma. Mas isso nos leva a uma indagação: Em que situação podemos trocar a posição dos ponteiros de um relógio, e continuarmos com uma hora possível?

Para isso, façamos algumas considerações iniciais:

Designemos a medida em graus do ângulo do ponteiro dos minutos com o raio que passa por 12 por α_m e o do ponteiro das horas por $\alpha_{h,m}$ ao marcarem h horas e m minutos



$$0 \leqslant h \leqslant 11, \; h \in \mathbb{Z}$$
$$0 \leqslant m < 60, \; m \in \mathbb{R}$$

Assim $\alpha_m = 6m$ e $\alpha_{h,m} = 30h + m/2$

Temos, necessariamente

$$\alpha_m = 12\left(\alpha_{h,m} - 30\left[\frac{\alpha_{h,m}}{30}\right]\right)$$ onde $[x]$ = maior inteiro contido em x.

Se pudermos trocar a posição do ponteiro das horas com o dos minutos, teremos também

* v. Olimpíadas, p. 61.

$\alpha_{h,m} = 12\left(\alpha_m - 30\left[\frac{\alpha_m}{30}\right]\right)$, ou seja,

$30h + \frac{m}{2} = 12\left(6m - 30\left[\frac{m}{5}\right]\right)$, ou

$\frac{143m}{60} = h + 12\left[\frac{m}{5}\right]$. Como $h \in \mathbb{Z}$, $h + 12\left[\frac{m}{5}\right] \in \mathbb{Z}$

Façamos $h + 12\left[\frac{m}{5}\right] = k$. Então $m = \frac{60\,k}{143}$ e

$h = k - 12\left[\frac{12\,k}{143}\right]$, onde k assume todos os valores inteiros entre 0 e 142. Isso nos leva à solução: às $k - 12\left[\frac{12\,k}{143}\right]$ horas e $\frac{60\,k}{143}$ minutos com $0 \leqslant k \leqslant 142$, $k \in \mathbb{Z}$ pode-se permutar a posição dos ponteiros.

Demonstração:
O ângulo após a última marcação de hora do ponteiro dos minutos é

$\left(\frac{360\,k}{143} - 30\left[\frac{12\,k}{143}\right]\right)$ e o ângulo

$\alpha_{h,m} = 30\,k + \frac{30\,k}{143} - 360\left[\frac{12\,k}{143}\right]$ que é 12 vezes o ângulo após a última marcação de hora do ponteiro dos minutos, o que demonstra nossa afirmativa.

Observação:
Os ponteiros se encontram superpostos à h horas e $\frac{60\,h}{11}$ minutos com $0 \leqslant h \leqslant 10$, $h \in \mathbb{Z}$. Esses casos estão contidos na fórmula quando $k = 13\,h$, donde serão $13\,h - 12\left[h + \frac{h}{11}\right]$ horas e $\frac{60\,h}{11}$ minutos. Como $\left[h + \frac{h}{11}\right] = h$, isso equivale a h horas e $\frac{60\,h}{11}$ minutos, como queríamos demonstrar.

NR. *O ângulo entre os ponteiros*

Escreve o professor Jaibis Freitas de Souza, de Salvador, BA, que um aluno seu levou à sala de aula uma fórmula para calcular o menor ângulo θ, que os ponteiros de um relógio fazem, entre si, quando o relógio marca h horas e m minutos.

A fórmula é

$$\theta = \left|30\,h - \frac{11\,m}{2}\right| .$$

Essa expressão sai das fórmulas $\alpha_m = 6\,m$ e $\alpha_{h,m} = 30\,h + \dfrac{m}{2}$, do artigo anterior, desde que se observe que $\theta = |\alpha_{h,m} - \alpha_m|$.