

Triangulação de Delaunay

Aldo Zang, Dalia Bonilla, Edgard Arakaki

25 de junho de 2007

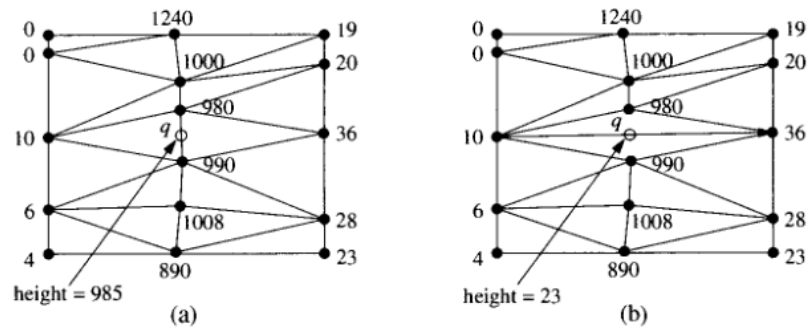
Resumo

1 Introdução

Terreno é o gráfico de uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que fornece a altura $f(p)$ a todo ponto p no domínio A . Só conhecemos os valores da função num conjunto finito de pontos $S \subset A$. Das alturas dos pontos em S aproximamos as alturas nos outros pontos do domínio A . Uma aproximação inocente atribui a todo ponto $p \in A$ a altura do ponto $q \in S$ mais próximo. Isto é um terreno discreto, não parece natural. Portanto para aproximar o terreno é como segue. Primeiro determinamos a triangulação de S (supondo que os pontos de S são tais que podemos fazer uma triangulação). O terreno assim aproximado é uma função linear por partes e contínua. A questão é, como triangular o conjunto de pontos?

Existem muitas formas, mas qual é a mais apropriada para o nosso objetivo?

Já que não temos outra informação, todas as triangulações são uma boa opção, mas algumas parecem mais naturais que outras.



Como visto na figura, considerar triângulos muito finos pode causar alguma distorção nos valores interpolados.

2 Definições

No possível faremos uma definição de triangulação de Delaunay sem ter usar os conceitos de diagrama de Voronoi.

Definição 1 (Triangulação). *Coleção de triângulos, arestas e vértices. Seja S um conjunto de pontos em \mathbb{R}^n .*

$$S = \{p_1, \dots, p_m\}$$

A triangulação K triangula S se os triângulos de K decompõe o fecho convexo de S e o conjunto de vértices de K é S .

Definição 2 (Triângulo de Delaunay). *Sejam p_i, p_j e $p_k \in S$. p_i, p_j, p_k são vértices de um triângulo de Delaunay se e só se o círculo que passa por p_i, p_j, p_k é vazio (isto é não contém outro ponto de S).*

Definição 3 (Aresta de Delaunay). *$\overline{p_i p_j} \in K$ é uma aresta de Delaunay se pertence a um ou dois triângulos de Delaunay.*

Definição 4 (Localmente Delaunay). *$\overline{p_i p_j} \in K$ é uma aresta localmente Delaunay se:*

1. Pertence a um triângulo então pertence a fronteira do fecho convexo.
2. Pertence a dois triângulos $p_i p_j p_k$ e $p_i p_j p_l$ e p_l está fora do circuncírculo de $p_i p_j p_k$.

Teorema 1. *A coleção de triângulos de Delaunay com vértices em S e com suas arestas e vértices formam uma triangulação K de S chamada triangulação de Delaunay.*

Demonstração. A prova deste teorema segue do seguinte:

Teorema:

Seja $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto de pontos do plano e seja $\{T_k\}$ a família de subconjuntos de S que determinam círculos vazios. Suponhamos que os vértices de cada T_k sejam ordenado segundo este círculo. Então:

1. o diagrama de Delaunay, obtido ligando os pontos consecutivos em algum T_k , é uma realização planar.
2. as arestas correspondentes a cada T_k delimitam uma região convexa R_k ; estas regiões possuem interiores disjuntos dois a dois e sua união é o fecho convexo de S .
3. as regiões R_k são exactamente as faces limitadas do diagrama planar determinado por $DEL(S)$.
4. finalmente, se S satisfaz a condição de quatro pontos quaisquer nunca serem cocirculares, então as regiões R_k determinam uma triangulação de $conv(S)$, conhecida como a triangulação de Delaunay determinada por S .

E a prova deste teorema esta em [IG]. □

Teorema 2. *Se toda aresta de K é localmente de Delaunay, então K é uma triangulação de Delaunay.*

Demonstração. Segue em [GT]. □

Observação 1. *Dois pontos p_i, p_j formam uma aresta de Delaunay se só se existe um círculo que passa por p_i, p_j e não contém outro ponto de S em seu interior.*

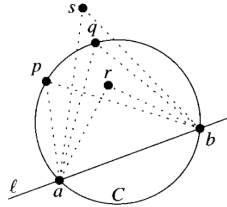
Sejam K uma triangulação de S , com m triângulos, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m}$ os ângulos dos triângulos de K ordenados em forma crescente tal que $\alpha_i \leq \alpha_j$ se $i < j$ e $A(K) := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m})$ o vetor ângulo de K .

Dada outra triangulação K' de S e $A(K') := (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{3m})$ seu vetor ângulo, temos que $A(K) > A(K')$ se existe $1 \leq i \leq 3m$ tal que $\alpha_j = \alpha'_j$ para todo $j < i$ e $\alpha_i > \alpha'_i$.

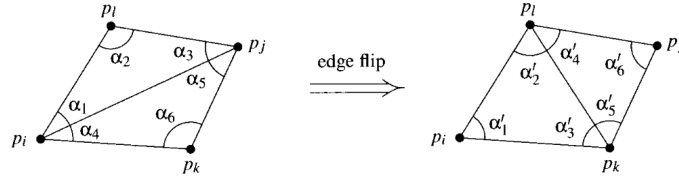
Definição 5 (Triangulação de ângulo ótimo). *K é de ângulo ótimo se $A(K) \geq A(K')$ para toda triangulação K' de S .*

Teorema 3 (Teorema de Thales (O menor ângulo definido entre 3 pontos)).
 Seja um C círculo, l linha que intersecta C em a, b, p, q, r e s do mesmo lado de l . Suponha que p, q estão sobre C , $r \in \text{int}C$, e s fora do C então

$$\angle arb > \angle apb = \angle aqb > \angle asb.$$



Demonstração. Demonstrado em aula. □



Definição 6 (Aresta ilegal). Uma aresta $e = p_i p_j$ é uma aresta ilegal se

$$\min_{1 \leq i \leq 6} \alpha_i < \min_{1 \leq i \leq 6} \alpha'_i.$$

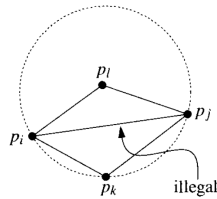
Definição 7 (Flip de Aresta). Seja $e = \overline{p_i p_j}$ aresta ilegal de uma triangulação K de S , tal que e está contida nos triângulos $p_i p_j p_k$, $p_i p_j p_l$ de K . E que formam um quadrilátero convexo. A operação que remove a aresta e , e insere a aresta $\overline{p_k p_l}$ é conhecida como flip de arestas e cria uma nova triangulação K' .

Observação 2. O flip será utilizado para modificar arestas ilegais transformando-as em arestas legais.

Observação 3. As arestas consideradas legais são arestas localmente de Delaunay.

Definição 8 (Triangulação legal). Uma triangulação é considerada legal se todas suas arestas são legais.

Lema 3.1. Seja a aresta $\overline{p_i p_j}$ da fronteira dos triângulos $p_i p_j p_k$, $p_i p_j p_l$ e seja C o círculo que passa por $p_i p_j p_k$. Então a aresta $e = \overline{p_i p_j}$ é ilegal se só se $p_l \in \text{int}C$.



Definição 9 (Degeneração). *Dado conjunto S quatro pontos sobre um círculo formam uma degeneração.*

Definição 10 (Posição Geral). *Se não existe degeneração ou seja existem 4 o mais pontos sobre um círculo.*

Observação 4. 1. *Pequena perturbação é suficiente para eliminar a degeneração, reduzindo assim o caso degenerado para o caso geral.*

2. *Em posição geral existe triangulação de Delaunay, e além disso é única.*

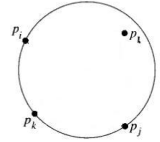
3. *Se não temos posição geral, então é possível conseguir uma triangulação do diagrama de Delaunay considerando os pontos de S com uma perturbação.*

Teorema 4. *S um conjunto de pontos no plano. Uma triangulação K de S é legal, se e só se, K é uma triangulação de Delaunay.*

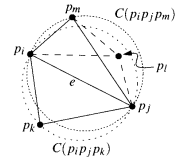
Demonstração. (\Leftarrow) Por definição qualquer triangulação de Delaunay é legal.

(\Rightarrow) (Por contradição)

Suponhamos que K não é uma triangulação de Delaunay então existem 4 pontos a, b, c, d tal que o circuncírculo $C(a, b, c)$ contém $d \in S$ em seu interior. Seja o triângulo bcd tal que sua interseção com o triângulo abc é a resta $e = \overline{bc}$. Seja $R = \{(p_i p_j p_k p_l) | p_l \in \text{int}C(p_i p_j p_k), p_i p_j p_k \cap p_i p_j p_l = p_i p_j\}$. Seja $(p_i p_j p_k p_l) \in R$ tal que $\angle p_i p_l p_j$ seja máximo.



Seja $p_i p_j p_m$ triângulo adjacente a $p_i p_j p_k$ ao longo de e . Já que K é legal, então e é legal, então p_m não pertence a $C(p_i, p_j, p_k)$. Agora o circuncírculo $C(p_i, p_j, p_m)$ contém parte de $C(p_i, p_j, p_k)$. Consequentemente, $p_l \in C(p_i p_j p_m)$. Seja $p_j p_m$ de $p_i p_j p_k$ tal que $p_j p_m p_l$ não intersecta $p_j p_m p_i$. Agora $\angle p_j p_l p_m > \angle p_i p_l p_j$. Contradizendo a definição de $(p_i p_j p_k p_l)$.



□

Observação 5. *Já que qualquer triangulação de ângulo ótimo deve ser legal, pelo teorema anterior implica que qualquer triangulação de ângulo ótimo de S é uma triangulação de Delaunay de S . Quando S está em posição geral, existe uma só triangulação legal, e é a única triangulação de ângulo ótimo, e é uma triangulação de Delaunay.*

3 Perturbação simbólica

A técnica computacional de perturbação simbólica de uma entrada geométrica justifica a escolha matematicamente conveniente de posição geral dos dados. Descreveremos uma perturbação em particular chamada "Simulação de Simplicidade" (SoS).

3.1 Teste de orientação

Sejam $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, e $c = (c_1, c_2)$ três pontos do plano. Consideramos a, b, c degenerados se eles são colineares, incluindo o caso em que dois deles ou até mesmo os três sejam coincidentes. No caso degenerado, o ponto c é combinação linear de a e b ; isto é, $c = ta + (1 - t)b$. Assim t existe se e somente se o determinante Δ é 0.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

No caso não degenerado, temos que c está a *direita* ou *esquerda* de a, b . Podemos utilizar o sinal do determinante para decidir se c está a *direita* ou *esquerda*.

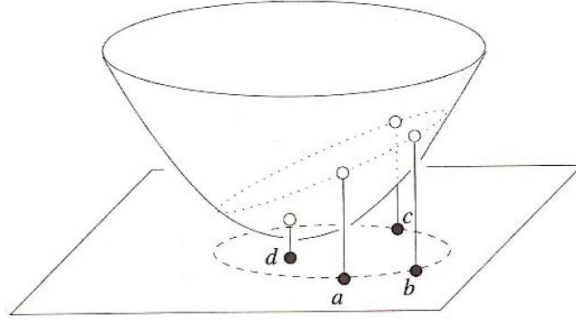
Lema 4.1. *O ponto c está a esquerda de a, b (nessa ordem) se e somente se $\det\Delta > 0$, e a direita se $\det\Delta < 0$.*

Demonstração. Em primeiro lugar vamos testar a proposição para os pontos $a_0 = (0, 0)$, $b_0 = (1, 0)$, $c_0 = (0, 1)$. É um fato geometricamente obvio que c_0 está à *esquerda* de a_0, b_0 , e temos de fato

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Podemos mover continuamente a_0, b_0, c_0 para uma posição a, b, c qualquer com c a *esquerda* de a, b sem passar por três pontos colineares. Como a função determinante muda continuamente com as coordenadas, permanecerá positivo durante todo o caminho desde a_0, b_0, c_0 até a, b, c . Da mesma forma, podemos tratar o caso de c estar a *direita* de a, b, c , começando por exemplo com $a_0 = (0, 0)$, $b_0 = (1, 0)$, $c_0 = (0, -1)$. □

Lema 4.2. *Dados os pontos a, b, c, d do plano. O ponto d está dentro do circuncírculo de a, b, c se e somente se o ponto d' está verticalmente embaixo do plano determinado por a', b', c' , onde $x' = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$ quando $x = (x_1, x_2)$.*



Demonstração. Seja U o circuncírculo de a, b, c e H o plano passando por a', b', c' . Primeiro mostraremos que U é uma projeção vertical (ortogonal na terceira coordenada) de $H \cap G$ onde G é o parabolóide definido pelo grafo $(x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$. Transformamos o espaço mapeando cada ponto (x_1, x_2, x_3) para $(x_1, x_2, x_3 - x_1^2 - x_2^2)$. Os pontos a', b', c', d' são mapeados de volta em a, b, c, d e o parabolóide G é mapeado no plano x_1, x_2 . O plano H é mapeado num parabolóide que passa por a, b, c e intersecta o plano x_1, x_2 no circuncírculo de a, b, c, d .

Temos que o plano H divide G em três partes: a parte de G que fica acima de H , a curva $H \cap G$, e a parte de G que fica por baixo de H . A curva $H \cap G$ é projetada no circuncírculo de a, b, c , e a parte por baixo de H é projetada no disco aberto determinado pelo circuncírculo de a, b, c . Daí segue-se que d' pertence à parte de G que está por baixo de H se e somente se d está dentro do circuncírculo de a, b, c . \square

4 Teste IN-CIRCLE

O teste de in-circle é formulado para 4 pontos a, b, c, d no plano. Consideramos a, b, c, d degenerados se a, b, c são colineares (três pontos colineares) ou a, b, c, d são cocirculares. Dado que já vimos como testar pontos colineares, passemos ao caso de pontos cocirculares. Para testar pontos cocirculares, vamos utilizar pontos no parabolóide, $a = (a_1, a_2, a_3)$ com $a_3 = a_1^2 + a_2^2$, conforme utilizado na prova do teorema anterior. Segundo o teorema anterior os pontos a, b, c, d estão no mesmo círculo se e somente se a', b', c', d' são coplanares em \mathbb{R}^3 . Isto quer dizer que d' é uma combinação afim de a', b', c' , o que é equivalente a ter $\det \Gamma = 0$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 1 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix}$$

No caso não degenerado d está dentro ou fora do circuncírculo de a, b, c . É possível utilizar os determinantes de Δ e Γ para decidir se d está dentro ou fora. Note também que uma permutação de a, b, c faz com que o determinante Γ mude o sinal, mas a configuração geométrica de a, b, c não muda. Como é possível ver, o sinal de $\text{Det } \Delta$ e $\text{Det } \Gamma$ mudam de sinal simultaneamente com cada permutação de a, b, c , logo podemos multiplicá-los para manter o sinal por

permutações e assim ter consistência de sinal de acordo com a configuração geométrica de a, b, c .

Lema 4.3 (incircle). *O ponto d está dentro do circuncírculo de a, b, c se e somente se $\det\Delta \cdot \det\Gamma < 0$, e d está fora do circuncírculo de a, b, c se e somente se $\det\Delta \cdot \det\Gamma > 0$.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar a proposição para o os pontos $d_0 = (1/2, 1/2)$ e $a_0 = (0, 0), b_0 = (1, 0), c_0 = (0, 1)$. O ponto d_0 está no centro do circuncírculo de a_0, b_0, c_0 pois d_0 está no ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo determinado por a_0, b_0, c_0 . O determinante Δ é 1, e o de Γ é

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = -1/2$$

Sendo o produto $\det\Delta \cdot \det\Gamma = 1 \cdot (-1/2) < 0$. Na prova do teste de orientação, obtivemos o resultado geral a partir do caso particular por meio da continuidade. Especificamente, qualquer configuração a, b, c, d onde d está dentro do circuncírculo de a, b, c pode ser obtido a partir de a_0, b_0, c_0, d_0 por meio de uma movimentação continua contornando todas as degenerações. Os sinais dos determinantes de Δ e Γ permanecem iguais ao longo da movimentação e portanto o sinal do seu produto também. Da mesma forma é possível tratar o caso em que d está fora do circuncírculo de a, b, c . \square

4.1 Construção algébrica

Vamos apresentar agora uma visão algébrica mais abstrata da degeneração como fenômeno geométrico. Veremos aqui somente o fenômeno de orientação no plano, mas estas idéias são aplicáveis ao caso de degeneração numa circunferência. Seja S um conjunto de n pontos, $p_i = (\phi_{i,1}, \phi_{i,2})$, para $1 \leq i \leq n$. Enumerando as $2n$ coordenadas numa seqüência, podemos pensar S como sendo um ponto no espaço $2n$ dimensional. Mais especificamente, S é mapeado em $Z = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, onde $\zeta_{2i-1} = \phi_{i,1}$ e $\zeta_{2i} = \phi_{i,2}$, para $1 \leq i \leq n$. O ponto Z é degenerado se e somente se

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{2i-1} & \zeta_{2i} \\ 1 & \zeta_{2j-1} & \zeta_{2j} \\ 1 & \zeta_{2k-1} & \zeta_{2k} \end{bmatrix} = 0$$

Para algum $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$. A equação identifica uma variedade diferenciável de dimensão $(2n - 1)$ em \mathbb{R}^{2n} . Existem no total $\binom{n}{3}$ destas variedades, M_I , e Z é degenerado se e somente se Z pertence à união destas Variedades. Cada variedade tem uma dimensão a menos que o espaço ambiente e portanto tem medida zero em \mathbb{R}^{2n} . Temos que a união finita de conjuntos de medida zero tem medida zero, com o qual temos que se Z for degenerado, pertence a um conjunto que tem medida zero em \mathbb{R}^{2n} . Nesse caso toda vizinhança aberta de Z em \mathbb{R}^{2n} contem pontos não degenerados. Assim, um ponto vizinho a Z é chamado de uma *perturbação* de Z ou S . O resultado em vizinhanças implica que existe uma perturbação não degenerada de S arbitrariamente pequena.

4.2 Perturbação

Construiremos uma perturbação não degenerada de S utilizando para isso parâmetros positivos $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2n}$. Estes parâmetros podem ser escolhidos de maneira arbitrária e suficientemente pequenos, e podemos pensá-los como infinitésimos. Queremos tomá-los diferentes o suficiente, e ordená-los de acordo com a sua medida.

Seja Z pertence \mathbb{R}^{2n} , e para cada $\epsilon > 0$ definimos

$$Z(\epsilon) = (\zeta_1 + \epsilon_1, \zeta_2 + \epsilon_2, \dots, \zeta_{2n} + \epsilon_{2n}),$$

onde $\epsilon_i = f_i(\epsilon)$ com $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $f_i(0) = 0$. Se os ϵ_i são diferentes o suficiente, temos as seguintes propriedades dadas por ϵ quando é suficientemente pequeno

- I. $Z(\epsilon)$ é não degenerado.
- II. $Z(\epsilon)$ mantém todas as propriedades não degeneradas de Z .
- III. O cômputo adicional para simular $Z(\epsilon)$ é desprezível.

Se tomarmos $\epsilon_i = \epsilon^{2^i}$ temos $\epsilon_1 \gg \epsilon_2 \gg \epsilon_3 \gg \dots \gg \epsilon_{2n}$, pois ϵ é arbitrariamente pequeno e desta forma veremos que o cômputo resultará simples pois somente compararemos potências de ϵ . Mostramos a continuação que o cálculo da orientação dos pontos p_i, p_j, p_k após a perturbação. Como visto anteriormente no teste de orientação, a orientação é dada pelo sinal do determinante:

$$\Delta(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{2i-1} + \epsilon_{2i-1} & \zeta_{2i} + \epsilon_{2i} \\ 1 & \zeta_{2j-1} + \epsilon_{2j-1} & \zeta_{2j} + \epsilon_{2j} \\ 1 & \zeta_{2k-1} + \epsilon_{2k-1} & \zeta_{2k} + \epsilon_{2k} \end{bmatrix}$$

Notemos que $\Delta(\epsilon)$ é um polinômio na variável ϵ . Neste polinômio os termos com menor potência são mais significativos que os de maior potência, dado que ϵ é arbitrariamente pequeno. Se assumirmos que $i < j < k$ e escrevermos os termos de $\det \Delta(\epsilon)$ em ordem decrescente, temos:

$$\det \Delta(\epsilon) = \det \Delta - \det \Delta_1 \cdot \epsilon^{2^{2i-1}} + \det \Delta_2 \cdot \epsilon^{2^{2i}} + \det \Delta_3 \cdot \epsilon^{2^{2j-1}} - 1 \cdot \epsilon^{2^{2j-1}} \epsilon^{2^{2i}} \pm \dots$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{2i-1} & \zeta_{2i} \\ 1 & \zeta_{2j-1} & \zeta_{2j} \\ 1 & \zeta_{2k-1} & \zeta_{2k} \end{bmatrix}, \\ \Delta_1 &= \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{2j} \\ 1 & \zeta_{2k} \end{bmatrix}, \\ \Delta_2 &= \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{2j-1} \\ 1 & \zeta_{2k-1} \end{bmatrix}, \\ \Delta_3 &= \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{2i} \\ 1 & \zeta_{2k} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

A propriedade I é satisfeita porque o quinto termo é não nulo para todo $\epsilon > 0$, e sua influencia sobre o sinal do determinante não pode ser cancelada pelos termos subsequentes dado que podemos tomar ϵ suficientemente pequeno a fim de que o aporte desses termos seja tão pequeno quanto for preciso. A propriedade II é satisfeita porque o sinal do determinante perturbado é o mesmo que o não perturbado a menos que este último se anule, sendo neste caso o determinante degenerado.

4.3 Implementação

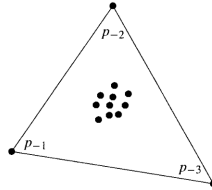
A fim de mostrar a propriedade III, mostraremos uma implementação do teste para $Z(\epsilon)$. Primeiro ordenamos os índices tal que $i < j < k$, e contamos o número de transposições. Então determinamos se os três pontos perturbados formam uma orientação a *esquerda* ou *direita* calculando os determinantes das 4 submatrizes:

```
Boolean LEFTTURN (integer  $i, j, k$ ):  
  Asset  $i < j < k$ ;  
  Case  $\det \Delta \neq 0$ : return  $\det \Delta > 0$ ;  
  Case  $\det \Delta_1 \neq 0$ : return  $\det \Delta_1 < 0$ ;  
  Case  $\det \Delta_2 \neq 0$ : return  $\det \Delta_2 > 0$ ;  
  Case  $\det \Delta_3 \neq 0$ : return  $\det \Delta_3 > 0$ ;  
  Otherwise: return FALSE.
```

Se o número de transposições para ordenar i, j, k é ímpar, então a ordenação inverte o sinal, e corrigimos invertendo o sinal da função LEFTTURN. Devemos notar que o sinal dos determinantes devem ser computados exatamente. Com a aritmética de ponto flutuante normal, isto geralmente não é possível.

5 Algoritmo

- Dado um conjunto S de pontos, o algoritmo incremental para triangulação de Delaunay inicia criando 3 pontos adicionais, $p_{-1}p_{-2}p_{-3}$ formando um triângulo T_0 tal que o fecho convexo de $S \subseteq T_0$, chamaremos a triangulação que contém apenas o triângulo T_0 de K_0 .



Algorithm 1 createArtificialPoints

createArtificialPoints(S, n) {Cria os triângulo artificial}

- O algoritmo consiste inserir incrementalmente o ponto $p_i \in S$, calculando assim a triangulação de Deulanay K_i para o conjunto de pontos $p_1 \dots p_i$. Para cada ponto p_i inserido, encontra-se o triângulo $t_i = p_a p_b p_c \in K_{i-1}$ tal que $p_i \subset t_i$, como o triângulo T_0 contém todos os trinângulos, qualquer ponto de S está dentro de algum triângulo.

Algorithm 2 findTriangle

$t \leftarrow \text{findTriangle}(p_i, DAG)$

- Ao encontrar o triângulo t_i dividimos este triângulo em 3, sendo estes, $p_i p_a p_b$, $p_i p_b p_c$, $p_i p_c p_a$.

Algorithm 3 split

split(v_i, t) {Adiciona v_i a $p_i p_j p_k$, dividindo-o em três triângulos}

- Tendo em vista que a triangulação $T_i = K_{i-1} - t_i \cup p_i p_a p_b, p_i p_b p_c, p_i p_c p_a$ é uma triangulação com os i primeiros pontos de S , cabe arrumá-la de forma a que a triangulação T_i seja de Delaunay.

- As arestas p_ap_b , p_bp_c , p_cp_a do triângulo t_i que foi removido devem ser novamente legalizadas, por causa da inserção de p_i . Pois o p_i pode estar dentro do círculo definido por p_k e dois pontos $\in p_a, p_b, p_c$ que eram um triângulo de Delaunay em K_{i-1} .

Algorithm 4 split

```

legalizeEdge( $p_i, p_ap_b$ )
legalizeEdge( $p_i, p_bp_c$ )
legalizeEdge( $p_i, p_cp_a$ )

```

5.1 Algoritmo

Algorithm 5 Delaunay

Require: Um array de n pontos S

Ensure: Um array de triângulos D

```

1: createArtificialPoints( $S, n$ ) {Cria os triângulo artificial}
2: for  $i < n$  do
3:    $t \leftarrow \text{findTriangle}(v_i, DAG)$ 
4:   split( $p_i, t$ ) {Adiciona  $p_i$  a  $p_ap_bp_c$ , dividindo-o em três triângulos}
5:   legalizeEdge( $p_i, t_1$ )
6:   legalizeEdge( $p_i, t_2$ )
7:   legalizeEdge( $p_i, t_3$ )
8: end for

```

5.2 legalizeEdge

Verifica se aresta é ilegal, se for assim faz o flip da aresta. Criando 2 novos triângulos, e portanto dois novos circuncírculos que possivelmente tenham um ponto em seu interior, como veremos depois todas as arestas incidentes ao p são legais, logo temos legalizar as duas arestas do quadrilátero que não incidem em p .

Algorithm 6 legalizeEdge

Require: Vértice v e o triângulo t

Ensure: A aresta e é legal, ou é realizado o flip em e

```

 $v_1 \leftarrow$  vértice de  $e$ 
 $v_2 \leftarrow$  vértice de  $e$ 
 $v_3 \leftarrow$  vértice do triângulo  $t$ 
if aresta  $e$  é ilegal then
  flip( $e$ );
  legalizeEdge( $v_1v, t$ )
  legalizeEdge( $v_2v, t$ )
end if

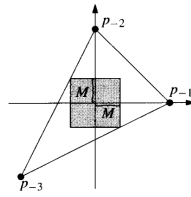
```

6 DAG

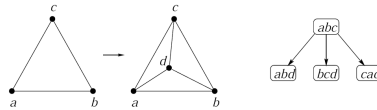
Para achar o triângulo que contém o ponto p criamos uma estrutura de localização (grafo acíclico direcionado). As folhas correspondem a triângulação K de S . Todo o histórico do algoritmo está na estrutura, isto é, todo triângulo criado por flip ou splitting.

A estrutura de localização é construída como segue:

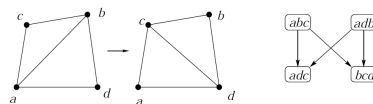
- Inicializamos com um só nó que corresponde ao triângulo $p_{-1}p_{-2}p_{-3}$.



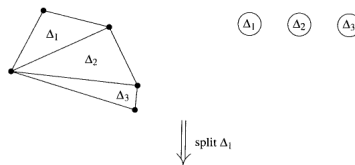
- Para algum passo do algoritmo o triângulo $p_i p_j p_k$ é dividido em 3 triângulos por splitting e este cambio corresponde em D a 2 ou 3 novos nós para cada triângulo criado.

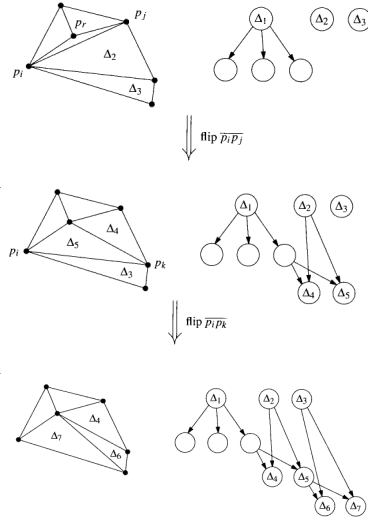


- Se em outro passo do algoritmo temos que os triângulos $p_i p_j p_k$ e $p_i p_j p_l$ são substituídos pelos triângulos $p_i p_l p_k$ e $p_j p_l p_k$ por flip da aresta $\overline{p_i p_j}$, então criamos folhas para os novos triângulos, e os nós correspondentes a $p_i p_j p_k$ e $p_i p_j p_l$ têm filhos correspondentes aos dois novos nós.



- Como usar o DAG para localizar p no triângulo da atual triangulação?
 - Começamos na raiz, (a raiz é nó que corresponde ao triângulo $p_{-1}p_{-2}p_{-3}$). Testamos nos filhos da raiz para ver em que triângulo está p , e descemos até o correspondente filho. E testamos recursivamente em cada filho até alcançar uma folha, que corresponde a um triângulo que contém p .





- Já que o grau de saída de qualquer nó é no máximo 3, toma um tempo linear no número de nós em procurar o caminho, ou de outro jeito em um número de triângulos armazenados em D que contém v .

Lema 4.4. *Cada nova aresta criada por DelaunayTriangulation ou em Legalizeedge durante a inserção de v é uma aresta de Delaunay de $\Omega \cup \{p_1, \dots, p_r\}$.*

Demonstração. Sejam as arestas $\overline{p_r p_i}, \overline{p_r p_j}, \overline{p_r p_k}$ (e $\overline{p_r p_l}$) criadas por divisão do triângulo $p_i p_j p_k$ (e do triângulo $p_i p_j p_l$). Já que $p_i p_j p_k$ é um triângulo de Delaunay na triangulação passada antes de adicionar o v . Então o circuncírculo C de $p_i p_j p_k$ contém o ponto v em seu interior.

Podemos achar então um círculo C' que passa por p_i e p_r que esteja contido em C . E C' é um círculo vazio, isso implica que $\overline{p_r p_i}$ uma aresta de Delaunay depois da adição de v , o mesmo acontece para $\overline{p_r p_j}, \overline{p_r p_k}$ (e $\overline{p_r p_l}$ se existe).

Consideremos agora uma aresta "trocada" por o flip em Legalizeedge. Tal

aresta substitue uma aresta $\overline{p_i p_j}$ dos triângulos $p_i p_j p_l, p_i p_j v$ por uma aresta $\overline{v p_l}$ incidente para o v .

Já que $p_i p_j p_l$ é um triângulo de Delaunay na triangulação passada antes de adicionar o v (se não $\overline{p_i p_j}$ seria legal) e portanto o circuncírculo C que passa por $p_i p_j p_l$ contém v em seu interior. Podemos achar então um círculo que passa por p_r e por p_l e não contém outro ponto. Logo $\overline{p_r p_l}$ é uma aresta de Delaunay. \square

7 Análise

Lema 4.5. *Esperamos que o número de triângulos criados por algoritmo é no máximo $9n + 1$*

Demonstração. Depois da inserção de p_r no passo r do algoritmo, existem k arestas incidentes em p_r , seja $\deg(p)$ o grau de p_r , e $\deg(p) = k$.

Agora temos pela inserção de p_r 3 novos triângulos pelo splitting e $2(k - 3)$ pelo flip, no total temos $2(k - 3) + 3$ novos triângulos.

Qual é o valor esperado do grau de p_r ?

p_r é um elemento aleatório de S . O número de arestas do diagrama de Delaunay é $3(r + 3) - 6$ e 3 são do triângulo p_{-1}, p_{-2}, p_{-3} , logo temos no total $3(r + 3) - 9$ arestas. Portanto temos $2(3(r + 3) - 9) = 6r$ vértices. Logo para os r pontos temos que na média ficam 6 arestas por vértice.

O número de triângulos no passo r do algoritmo é como segue:

$$E[n_{\text{de.novos.}\Delta\text{'s.no.paso.r}}] \leq E[2\deg(p_r) - 3] = 2E[\deg(p_r)] - 3 = 2\hat{6} - 3 = 9$$

□

Um passo importante do algoritmo é a busca de qual triângulo $\tau_{i-1} \in D_{i-1}$ o ponto p_i inserido se encontra. Para tanto, é feita a busca utilizando a estrutura de DAG. Esta estrutura contém todos os triângulos já gerados pelo algoritmo, assim, é necessário achar um caminho entre o triângulo xyz inicial até o triângulo τ_{i-1} tal que todos os triângulos no caminho contenham o ponto p_i . O DAG da triangulação D_j consiste em j camadas $0, 1, 2, \dots, j$, os nós da camada j representa os triângulos da triangulação D_j . Seja $\sigma_j \in D_j$ o triângulo que contém p_i , os triângulos $\sigma_0 = xyz, \sigma_1, \dots, \sigma_j$ formam uma seqüência de triângulos, não necessariamente disjuntos. Seja G_j o conjunto de triângulos removidos de D_j durante a inserção de p_{j+1} em D_j e H_j o conjunto de triângulos removidos de D_j durante a inserção de p_i em D_j . Temos que $\sigma_j = \sigma_{j+1}$ se G_j e H_j forem disjuntos. Suponha que $\sigma_j \neq \sigma_{j+1}$, então $X_j = G_j \cap H_j \neq \emptyset$ e todos os triângulos entre σ_j até σ_{j+1} são gerados por flips que removem triângulos em X_j , logo o custo para procurar o triângulo que contém p_i é no máximo proporcional a soma da cardinalidade de X_j para j de 0 até $i - 2$.

Considerando hipoteticamente a inserção de p_i em D_j e logo após a inserção de p_{j+1} na triangulação de Delaunay de $S_j \cup p_{j+1}$. Seja Y_j o conjunto de triângulos removidos durante a inserção de p_{j+1} , e $Z_j \subseteq Y_j$ o subconjunto de triângulos que não pertencem a D_j , cada triângulo em Z_j é criado durante a inserção de p_i , então p_i deve ser um de seus vértices. Temos que $X_j = G_j - (Y_j - Z_j)$.

Sendo a cardinalidade de cada conjunto representada pela sua letra minúscula temos que os valores esperados de g_j e y_{j-1} são os mesmos, pois ambos contam os triângulos removidos após a inserção do j -ésimo ponto. Além disso, como a esperança das somas é a soma das esperanças temos que:

$$E \left[\sum_{j=0}^{i-2} x_j \right] = \sum_{j=0}^{i-2} (E[g_j] - E[y_j] + E[z_j]) = E[g_0 - g_{i-1}] + \sum_{j=0}^{i-2} E[z_j]$$

Para calcular o valor esperado de z_j , podemos usar o fato que dentre os $j + 2$ pontos, para cada par é igualmente provável que seja p_{j+1} ou p_i . Por exemplo,

se p_{j+1} e p_i não estão conectados por uma aresta na triangulação de Delaunay de $S_j \cup p_{j+1}, p_i$, então $Z_j = \emptyset$. Geralmente, um triângulo na triangulação de Delaunay de $S_j \cup p_i$ tem probabilidade de no máximo $3/(j+1)$ de ser uma das arestas que poderão estar ilegais a partir de p_i . O número esperado de triângulos removidos pela inserção de p_{j+1} é no máximo quatro. Como o produto da esperança é a esperança dos produto, temos que $E[z_j] \leq (4 \cdot 3)/(j+1)$. Assim o custo esperado da busca pelo triângulo que contém p_i é

$$\sum_{j=0}^{i-2} E[x_j] \leq \sum_{j=0}^{i-2} \frac{12}{j+1} \leq 1 + 12 \ln(i-1)$$

Assim o tempo total gasto na busca da história do DAG é $\sum_i \sum_j E[x_j] \leq c \cdot n \log n$.

Referências

- [IG] P. C. P. Carvalho e L. H. de Figueiredo, *Introdução à Geometria Computacional*, 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991.
- [GC] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf, *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, 1997.
- [GT] H. Edelsbrunner, *Geometry and Topology for Mesh Generation*, Cambridge, 2001.